

L'épreuve comporte deux pages numérotées de 1/2 à 2/2.

Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction. **Le barème est approximatif.**

Exercice 1 : (4 points)

I. Indiquer la réponse exacte :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \sin\left(\frac{2}{x}\right) \right]$ égale à :

a/ 0

b/ 2

c/ $+\infty$

2) L'équation : $x^5 + x - 3 = 0$ possède dans \mathbb{R} :

a/ une solution

b/ deux solutions

c/ cinq solutions.

3) La suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par : $u_n = \cos(n\pi)^{n+1}$:

a/ converge vers 1

b/ converge vers -1

c/ n'admet pas de limite.

II. Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse :

1) $f(]-1; 1[)$ par la fonction : $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ est $]0; 1[$.

2) Soit z un nombre complexe non nul ; si $|z| = 1$ alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

3) Un argument du nombre complexe : $1 + e^{i\theta}$ est : $\frac{\theta}{2}$.

Exercice 2 : (5,5 points)

I- Le plan complexe est rapporté à ROND $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 3$; $z_B = -i$ et $z_C = 2 + 3i$.

1) Placer les points A, B et C dans le plan \mathcal{P} .

2) a/ Calculer les modules : $|z_B - z_A|$ et $|z_C - z_A|$.

b/ Donner un argument de : $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC.

3) a/ Déterminer l'ensemble \mathcal{E} des points $M(z)$ tels que : $|z + i| = 2$.

b/ Déterminer l'ensemble \mathcal{D} des points $M(z)$ tels que : $|iz - 3i| = |z - 2 - 3i|$.

II- On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$z_A = 1 + i$; $z_B = \sqrt{3} + i$; $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_D = (\sqrt{3} + 1) + i(1 - \sqrt{3})$.

1) a/ Écrire la forme exponentielle de z_A ; z_B et z_C .

b/ Placer les points A, B et C dans le repère considéré.

c/ Montrer que OBC est un triangle rectangle isocèle.

2) a/ Vérifier que le point C est un point de cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 2.

b/ Montrer que la droite (CD) est tangente à (\mathcal{C}) en C.

3) On donne le nombre complexe : $z = z_A^3 z_B$.

a/ Donner la forme algébrique de z_A^3 ; puis en déduire la forme algébrique de z .

b/ Donner la forme trigonométrique de z .

c/ Déterminer alors les valeurs exactes de: $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Exercice 4 : (5 points)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}, \forall n \geq 0.$$

1) a/ Montrer que : $\forall n \geq 0; u_n \geq 1$.

b/ Montrer que (u_n) est suite décroissante.

c/ En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite ℓ .

2) On considère la suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par : $v_n = 3 + \frac{u_n}{u_n - 1}$.

a/ Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison.

b/ Exprimer (v_n) en fonction de n .

c/ En déduire que : $\forall n \geq 0; u_n = \frac{n+2}{n+1}$.

Exercice 5 : (5,5 points)

I. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$f(x) = \begin{cases} x + \sin(\pi x^2), & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ \frac{2x^2 - x}{2 - x}, & \text{si } x \in [0; 1] \\ 2 - x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$$

1) a/ Étudier la continuité de f en 0 et 1.

b/ Montrer que f est continue sur \mathbb{R}

2) a/ Montrer que pour tout $x < 0$; on a : $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.

b/ en déduire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

3) Montrer que la courbe de f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ à préciser.

II. 1) Montrer que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ admet dans $[-1; 1]$ une seule solution α et justifier que : $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

2) Soit g la fonction définie par: $g(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{5}{2}x^2 + x + 2$.

a) Dresser le tableau de variations de g sur $[-1; 1]$.

b) Montrer que : $g(\alpha) = \frac{5}{6}\alpha(1 - 2\alpha) + 2$.

c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-1; 1]$ une seule solution β .